Vojtech Bálint; Zuzana Sedliačková; Peter Adamko

O ukladaní kociek a iných objektov On the Packing of Cubes and Other Objects

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 65 (2020), No. 2, 61–75

O ukladaní kociek a iných objektov

Vojtech Bálint, Zuzana Sedliačková, Peter Adamko

Abstrakt. Uvedieme históriu a prehľad výsledkov o ukladaní kociek do kvádra s minimálnym objemom a pridáme aj hlavné myšlienky niektorých dôkazov. V závere sa veľmi stručne zmienime o iných ukladacích problémoch.

1. Úvod

Nech I je množina indexov. Uložiť systém konvexných telies T_i, $i \in I$, do telesa T znamená umiestniť telesá T_i tak, aby žiadne dve z nich nemali spoločný vnútorný bod a aby $\bigcup\limits_{i \in I} T_i \subset T$. Auerbach, Banach, Mazur a Ulam dokázali vetu, ktorú záujemca nájde v knihe so zaujímavým názvom *The Scottish Book* [73], pomenovanej podľa *Scottish Café* v Lembergu (dnes Ľvov), kde v podstate vznikla: Pre každé prirodzené číslo d a pre každé kladné číslo V existuje číslo $f_d(V)$ také, že každý systém d-rozmerných konvexných množín T_i, $i \in I$, s priemerom najviac 1 a s celkovým objemom najviac V sa dá uložiť do d-rozmernej kocky so stranou $f_d(V)$. Veta je známa pod názvom *veta o zemiakovom vreci*, lebo autori vtipne poznamenali, že v dôsledku tejto vety sa 1 kg zemiakov určite dá uložiť do vreca s konečným objemom.

Problém 1. Aká je najmenšia možná hodnota $f_d(V)$?

Prvý horný odhad čísla $f_d(V)$ našiel Kosiński [66] pre *paralelné* ukladanie *kvádrov* a jeho odhad bol postupne zlepšený v [42], [80] a [74]. Problém 1 je však príliš všeobecný, takže vyriešiť ho bude zrejme extrémne ťažké. Preto sa hľadali odpovede na jednoduchšie verzie pôvodnej otázky.

Impulzom pre výskum v tejto oblasti sa stal súbor 50 problémov s názvom *Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry* [81], ktorý Leo Moser (1921–1970) rozdal účastníkom konferencie v Boulder, Colorado, 1963. Niektoré časti toho súboru viackrát vydal v rokoch 1977 až 1981 jeho mladší brat Willy, ale ako celok vyšli až v roku 1991 (pozri [82]). Od roku 1986 začali W. Moser a J. Pach pod názvom *Research problems in discrete geometry* vydávať rozšírené verzie týchto problémov spolu s dosiahnutými výsledkami, ktoré medzitým vznikli (pozri [83], spolu 9 vydaní). Tieto sa stali hnacím motorom výskumu v tejto oblasti matematiky. Pál Erdős inicioval knižné spracovanie tejto krásnej problematiky a úvodné slovo k budúcej knihe napísal (našťastie) už v roku 1991. Kniha [25] vyšla až v roku 2005 a stala sa bibliou riešiteľov takýchto problémov.

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Nám. Ľudovíta Fullu 21, 010 08 Žilina, Slovenská republika, e-mail: `vojtech.balint@gmail.com`, Mgr. Zuzana Sedliačková, PhD., Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovenská republika, e-mail: `zuzana.sedliackova@fstroj.uniza.sk`,
Mgr. Bc. Peter Adamko, PhD., Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovenská republika, e-mail: `peter.adamko@fpedas.uniza.sk`

Medzi pôvodnými problémami L. Mosera bol aj tento:

Problém 2. Určte najmenšie číslo A také, že každý systém štvorcov s celkovým obsahom 1 sa dá paralelne uložiť do nejakého obdĺžnika s obsahom A. (Pri paralelnom ukladaní sú strany štvorcov rovnobežné so stranami obdĺžnika. Analogicky pre vyššie dimenzie.)

Zaveďme nasledovné označenia. Nech $V_n(d)$ je najmenšie číslo také, že každý systém n kociek s celkovým objemom 1 v d-rozmernom (euklidovskom) priestore sa dá uložiť do nejakého boxu, t. j. pravouhlého rovnobežnostena s objemom $V_n(d)$. (Rozmery boxu sa pre rôzne systémy kociek môžu meniť.) Určte všetky $V_n(d)$ a pre každú dimenziu $d = 2, 3, 4, \ldots$ aj číslo $V(d) = \sup\{V_n(d),\ n \in \mathbb{N}\}$. Systém kociek s celkovým objemom 1 nazveme jednotkový systém. (Pri tomto označení je $A = V(2)$.)

Je zrejmé, že $V_n(d) \leqq V_{n+1}(d)$, t. j. postupnosť $\{V_n(d)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca. Priamy dôsledok definície je, že $\lim\limits_{n\to\infty} V_n(d) = V(d)$ pre každé $d = 2, 3, 4, \ldots$

2. Dimenzia 2

Kleitman a Krieger v [64] dokázali, že každý konečný jednotkový systém štvorcov sa dá uložiť do obdĺžnika s dĺžkami strán 1 a $\sqrt{3}$. Tento horný odhad zlepšili v [65] na obdĺžnik s dĺžkami strán $\frac{2}{\sqrt{3}}$ a $\sqrt{2}$, teda $V(2) \leqq \frac{4}{\sqrt{6}} \doteq 1{,}632\ 993\ 162$. Uviedli aj triviálny dolný odhad $V(2) \geqq V_2(2) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \doteq 1{,}207\ 106\ 781$.

Novotný v práci [86] dokázal, že $V_3(2) \doteq 1{,}227\ 7589$ a ukázal aj netriviálny dolný odhad $V(2) \geqq \frac{2+\sqrt{3}}{3} > 1{,}244$. Tento obsah je nutný pre uloženie jedného štvorca s dĺžkou strany $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a troch štvorcov s dĺžkou strany $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Neskôr v práci [88] dokázal, že $V_4(2) = V_5(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$, a toto v práci [89] rozšíril na $V_6(2) = V_7(2) = V_8(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

Pretože $V_4(2) = V_5(2) = V_6(2) = V_7(2) = V_8(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \doteq 1{,}244\ 016\ 936$, pričom malé štvorce sa dajú ekonomicky ukladať do prázdnych miest väčšieho obdĺžnika s obsahom $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$, je pravdepodobné, že práve Novotného štvorprvková konfigurácia je extremálna.

Hypotéza 1. $V(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

Netriviálny horný odhad $V(2) \leqq \frac{4}{\sqrt{6}} \doteq 1{,}632\ 993\ 162$ Kleitmana a Kriegera pre konečné systémy zlepšil Novotný v [87] na $V(2) < 1{,}53$. Tento horný odhad ďalej zlepšil pomocou počítača Hougardy v [53] na $V(2) \leqq \frac{2\,867}{2\,048} < 1{,}4$. Aj tento horný odhad je ale ďaleko od očakávanej presnej hodnoty $V(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \doteq 1{,}244\ 016\ 936$. Problém 2 teda dodnes nie je vyriešený.

Uveďme ešte dva súvisiace výsledky z práce [10].

Veta 1. *Nech konečný systém štvorcov so stranami dĺžok $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n$ má celkový obsah* 1. *Ak $x_1 \geqq \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{3}} \doteq 0{,}869\ 472\ 865$, tak tento systém sa dá uložiť do obdĺžnika, ktorého kratšia strana má dĺžku x_1 a ktorý má obsah $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.*

Veta 2. *Ak konečný systém štvorcov so stranami dĺžok* $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \geqq x_1 \geqq \ldots \geqq x_n$ *má celkový obsah* 1*, tak tento systém sa dá uložiť do obdĺžnika so stranami* $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ *a* 1.

Dôsledok tých dvoch viet je, že pri riešení problému 2 stačí uvažovať také jednotkové systémy štvorcov, v ktorých dĺžka x_1 strany najväčšieho štvorca splňuje nerovnosti $0{,}122\,008\,467 \doteq \frac{\sqrt{3}-1}{6} < x_1 < \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{3}} \doteq 0{,}869\,472\,865$.

3. Dimenzia 3

Pre trojrozmerný priestor Meir a L. Moser ukázali horný odhad $V(3) \leqq 4$. Novotný v práci [92] výrazne zlepšil tento odhad na $V(3) \leqq 2{,}26$, ale pravdepodobne ani tento nebude najlepší možný. Novotný v práci [90] totiž ukázal, že $V_2(3) = \frac{4}{3}$, pričom extrém sa dosiahne pre $x_1 = \sqrt[3]{\frac{8}{9}}$, $x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$. V tej istej práci ukázal, že $V_3(3) \doteq 1{,}440\,099\,51$, pričom toto maximum sa dosiahne pre tri kocky s dĺžkami hrán $x_1 \doteq 0{,}850\,849\,56$, $x_2 \doteq 0{,}635\,937\,94$, $x_3 \doteq 0{,}502\,451\,41$. V práci [91] ukázal, že $V_4(3) \doteq 1{,}519\,630\,3266$, pričom maximum sa dosiahne pre nasledovné štyri kocky: $x_1 \doteq 0{,}820\,068\,594$, $x_2 \doteq 0{,}584\,631\,1102$, $x_3 = x_4 \doteq 0{,}499\,112\,082$. V práci [92] potom ukázal, že $V_5(3) = V_4(3)$. Táto rovnosť naznačuje, že maximum sa možno zvyšovať ani nebude, pričom do najlepšej známej hornej hranice 2,26 je veľmi ďaleko.

Hypotéza 2. $V(3) \doteq 1{,}519\,630\,3266$.

Pôvodná otázka Lea Mosera sa týkala štvorcov, ale keďže všeobecné riešenie bolo a stále je v nedohľadne, začali sa skúmať n-prvkové konfigurácie v jednotlivých dimenziách, ako to naznačuje naša definícia čísel $V_n(d)$ a $V(d)$.

4. Metóda pre dvojprvkové systémy

Už skôr boli určené čísla $V_2(d)$ pre $d = 2, 3$. Tie čísla sa ale dajú určiť pre každú dimenziu, aj keď len numericky, lebo metóda vedie na rovnice vyšších stupňov. Postup je jednoduchý. Uvažujme dve kocky v d-rozmernom priestore s dĺžkami hrán x, y takými, že $0 < y \leqq x < 1$, pričom $x^d + y^d = 1$. Zrejme $x \geqq \frac{1}{\sqrt[d]{2}} \geqq 0{,}7$. Najekonomickejšie uloženie je také, že dve kocky položíme „vedľa seba“ tak, aby sa vošli do (pravouhlého) boxu s objemom $W(x, y) = x^{d-1}(x + y)$. Z podmienky $x^d + y^d = 1$ dostaneme $y = \sqrt[d]{1 - x^d}$, takže stačí určiť maximum funkcie $W(x) = x^{d-1}\left(x + \sqrt[d]{1 - x^d}\right)$ pre $0{,}7 \leqq x \leqq 1$. Štandardný výpočet dá pre stacionárny bod podmienku $\frac{1}{d} = x \cdot \sqrt[d]{(1 - x^d)^{d-1}} + 1 - x^d$.

Táto rovnica má explicitné riešenie pre $d = 2, 3, 4, 5$.

Pre $d = 2$ (pri našich podmienkach) je riešením $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \doteq 0{,}923\,879\,532$, $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \doteq 0{,}382\,683\,432$, a teda $W = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \doteq 1{,}207\,106\,781\,19$.

Pre $d = 3$ je explicitné riešenie $x = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$, a teda $W = \frac{4}{3}$.

Pre $d = 4$ vznikne rovnica 4. stupňa $2t^4 - 8t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 0$, kde $t = 4 \cdot (1 - x^4)$, pre $d = 5$ vznikne rovnica 3. stupňa $10t^3 - 10t^2 + 5t - 1 = 0$, kde $t = 5 \cdot (1 - x^5)$.

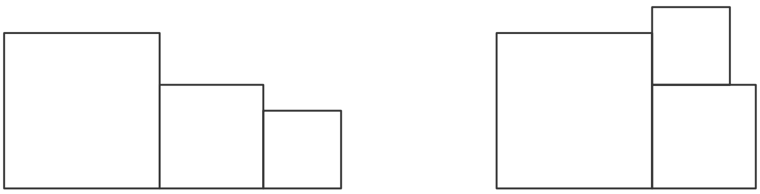
Obe tieto rovnice majú síce explicitné riešenie, ale oveľa lepší prehľad o rozmeroch kociek a tiež o objeme W poskytuje ich numerické vyjadrenie. Pre dimenziu 4 je

$W \doteq 1{,}420\,319\,245\,338$ pre kocky s dĺžkami hrán $x \doteq 0{,}976\,755\,178$, $y \doteq 0{,}547\,398\,666$, pre dimenziu 5 je $W \doteq 1{,}484\,663\,668\,95$ pre kocky s dĺžkami hrán $x \doteq 0{,}984\,432\,006\,16$, $y \doteq 0{,}596\,398\,034\,922$. Niektoré ďalšie číselné údaje sú v tabuľke (pozri ďalej).

5. O metóde pre trojprvkové systémy

Pripomeňme známe výsledky: $V_3(2) \doteq 1{,}227\,758\,9$, $V_3(3) \doteq 1{,}440\,099\,51$, $V_3(4) \doteq 1{,}633\,696\,619\,96$, $V_3(6) \doteq 1{,}944\,491\,609\,21$ a $V_3(8) \doteq 2{,}149\,306\,086\,70$ ([86], [90], [11], [13] a [101]). Poznáme aj výsledky $V_3(5) \doteq 1{,}802\,803\,791\,95$, $V_3(7) \doteq 2{,}059\,096\,799\,44$, $V_3(9) \doteq 2{,}218\,977\,774\,98$, $V_3(10) \doteq 2{,}272\,201\,257\,42$, $V_3(11) \doteq 2{,}315\,335\,807\,63$, $V_3(12) \doteq 2{,}353\,155\,266\,19$, $V_3(13) \doteq 2{,}386\,619\,625\,69, \ldots, V_3(20) \doteq 2{,}544\,992\,641\,62$ (tieto zatiaľ neboli publikované).

Určitá časť úvah sa dá spraviť všeobecne. Uvažujme tri kocky v d-rozmernom priestore s dĺžkami hrán x, y, z takými, že $0 < z \leqq y \leqq x < 1$ a $x^d + y^d + z^d = 1$, $d \geqq 2$. Do úvahy prichádzajú len dve uloženia: prvé (obr. 1 vľavo) vyžaduje objem $W_1 = x^{d-1}(x+y+z)$, druhé (obr. 1 vpravo) vyžaduje objem $W_2 = x^{d-2}(x+y)(y+z)$.



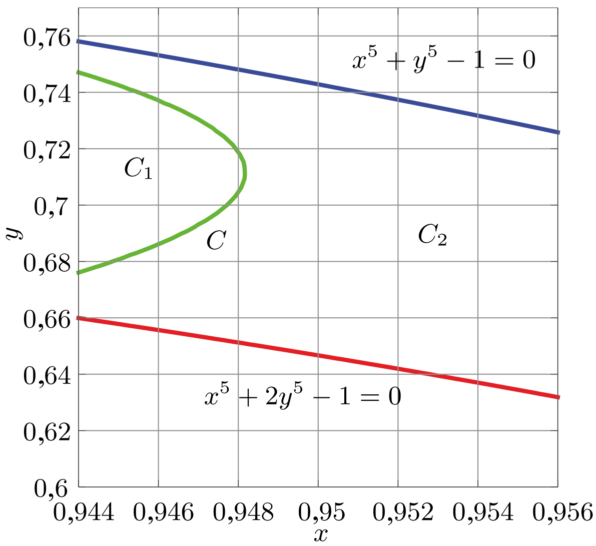
Obr. 1. Dve možné uloženia troch štvorcov

Ak $y + z \leqq x$, tak uložíme kocky ako na obr. 1 vpravo, a pre také uloženie stačí objem $V_2(d)$, ktorý nie je väčší ako $V_3(d)$; môžeme teda vždy predpokladať $y + z > x$. Z podmienky $x^d + y^d + z^d = 1$ vyplýva $z = \sqrt[d]{1 - x^d - y^d}$. Zrejmé je aj $y^d = 1 - x^d - z^d \leqq 1 - x^d$, takže $y \leqq \sqrt[d]{1 - x^d}$. Odtiaľ $y + z \leqq 2y \leqq 2\sqrt[d]{1 - x^d}$, takže z predpokladu $x < y + z$ máme $x < y + z \leqq 2\sqrt[d]{1 - x^d}$, a teda $x^d < 2^d(1 - x^d)$. Z toho dostaneme univerzálne horné ohraničenie $x < \frac{2}{\sqrt[d]{1+2^d}}$. Na druhej strane je $x^d \geqq \frac{1}{3}$, z čoho $x \geqq \frac{1}{\sqrt[d]{3}} \geqq 0{,}577$, takže $x \in \left[\frac{1}{\sqrt[d]{3}}; \frac{2}{\sqrt[d]{1+2^d}}\right]$.

Máme teda nájsť $\max \min\{W_1(X), W_2(X)\}$, kde $X = (x, y, z)$, na oblasti M určenej podmienkami $0 < z \leqq y \leqq x < 1$, $x^d + y^d + z^d = 1$, $x \in \left[\frac{1}{\sqrt[d]{3}}; \frac{2}{\sqrt[d]{1+2^d}}\right]$. Ľavé a pravé ohraničenie oblasti M tvoria dve zvislé priamky $x = \frac{1}{\sqrt[d]{3}}$ a $x = \frac{2}{\sqrt[d]{1+2^d}}$, pričom ľavé ohraničenie s rastúcim d pomerne rýchlo narastá: pre $d = 5$ je $x \geqq \frac{1}{\sqrt[5]{3}} \geqq 0{,}802\,74$, pre $d = 21$ je $x \geqq \frac{1}{\sqrt[21]{3}} \geqq 0{,}949$. Poznamenajme, že pri zvolenej dimenzii d je možné (a aj vhodné) interval pre x výrazne skrátiť. Vzhľadom na usporiadanie kociek podľa veľkosti $0 < z \leqq y \leqq x < 1$ platí $x^d + y^d \leqq x^d + y^d + z^d = 1$, takže musí byť $x^d + y^d \leqq 1$, a teda krivka $x^d + y^d = 1$ tvorí horné ohraničenie skúmanej oblasti M. Na tejto *hornej krivke* by išlo o neprípustný prípad $z = 0$, keďže ukladáme tri kocky. (Pripomeňme, že $V_2(d) \leqq V_3(d)$.) Ďalej $1 = x^d + y^d + z^d \leqq x^d + 2y^d$, takže musí byť

$1 \leqq x^d + 2y^d$, t. j. krivka $1 = x^d + 2y^d$ tvorí dolné ohraničenie skúmanej oblasti M. Na *dolnej krivke* $1 = x^d + 2y^d$ je $z = y$, t. j. tretia kocka je najväčšia možná.

Pre nájdenie max $\min\{W_1(X), W_2(X)\}$ treba predovšetkým vyriešiť otázku, ktorá z dvoch funkcií W_1, W_2 je menšia. Za tým účelom preskúmame rovnicu $W_1 = W_2$. To nastane práve vtedy, keď $x^2 = y(y+z)$; odtiaľ $z = \frac{x^2-y^2}{y}$, a teda v tomto prípade je $W_1 = W_2 = x^d + \frac{x^{d+1}}{y} = x^d \left(1 + \frac{x}{y}\right)$. Ak $z = \frac{x^2-y^2}{y}$ dosadíme do $x^d + y^d + z^d = 1$, po úprave dostaneme $0 = x^d y^d + y^{2d} - y^d + (x^2 - y^2)^d$. Krivku určenú touto rovnicou označíme C. Vzhľadom na to, že je $x \geqq 0{,}577$, pre naše úvahy potrebujeme len oblúk krivky C v 1. kvadrante „najviac vpravo“. To triviálne dolné ohraničenie $x \geqq 0{,}577$ sa dá v každej dimenzii pomerne jednoducho zvýšiť, napr. pre $d = 5$ na $x \geqq 0{,}944$. Pozri obr. 2.



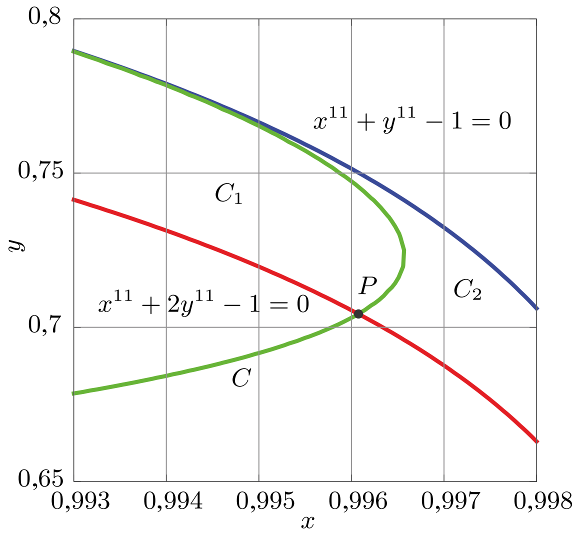
Obr. 2. Časť krivky C v dimenzii 5 spolu s horným aj dolným ohraničením oblasti M

Krivka C rozdelí oblasť M na dve otvorené oblasti C_1, C_2 so spoločnou hranicou C. Označme $\bar{C}_i$ uzáver množiny C_i. Funkcie W_1 aj W_2 sú spojité na M, pričom rovnosť $W_1 = W_2$ nastane práve v bodoch krivky C. Z toho vyplýva, že ak v jednom bode otvorenej oblasti C_i je $W_1 < W_2$, potom táto nerovnosť platí vo všetkých bodoch oblasti C_i. Pre konkrétnu dimenziu d nie je ťažké vybrať body $A_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$. Dostaneme $W_1(A_1) < W_2(A_1)$, takže nerovnosť $W_1(X) < W_2(X)$ platí pre každý bod $X \in C_1$. Analogicky nerovnosť $W_1(A_2) > W_2(A_2)$ implikuje platnosť nerovnosti $W_1(X) > W_2(X)$ v každom bode $X \in C_2$. Z toho je zrejmé, že platí:

$$\max_{X\in\bar{C}_1} \min \{W_1(X), W_2(X)\} = \max_{X\in\bar{C}_1} W_1(X),$$
$$\max_{X\in\bar{C}_2} \min \{W_1(X), W_2(X) = \max_{X\in\bar{C}_2} W_2(X).$$

Na kompaktnej množine $\bar{C}_1$ funkcia $W_1(x,\,y) = x^{d-1}\left(x + y + \sqrt[d]{1 - x^d - y^d}\right)$ nadobúda svoje maximum v nejakom bode B. Pre parciálnu deriváciu funkcie W_1 podľa y platí $\frac{\partial W_1}{\partial y} = x^{d-1}\left(1 - \left(\frac{y}{\sqrt[d]{1-x^d-y^d}}\right)^{d-1}\right)$. Rovnosť $\frac{\partial W_1}{\partial y} = 0$ nastáva práve vtedy, keď $\frac{y}{\sqrt[d]{1-x^d-y^d}} = 1$, t. j. práve vtedy keď $2y^d = 1 - x^d$, a to je práve vtedy keď $y = z$. To sú práve body na krivke, ktorá tvorí dolné ohraničenie oblasti M. Dolná krivka $1 = x^d + 2y^d$ a krivka C sa pretnú v bode $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[d]{2+2^{d/2}}};\, \frac{1}{\sqrt[d]{2+2^{d/2}}}\right)$. To znamená, že po spomínanom dostatočnom skrátení intervalu pre x sú pre $d \leqq 10$ všetky vnútorné body oblasti $\bar{C}_1$ nad dolnou krivkou, takže $\frac{\partial W_1}{\partial y} < 0$. Z toho potom vyplýva, že funkcia W_1 má maximum v bode B na „dolnej polovičke“ krivky C.

Pre $d \geqq 11$ dolná krivka $1 = x^d + 2y^d$ zasahuje do vnútra oblasti C_1 pre skúmané hodnoty x, takže funkcia W_1 má maximum v bode B buď na dolnej krivke naľavo od bodu P alebo na krivke C napravo od bodu P. Pozri obr. 3, na ktorom je znázornená situácia v dimenzii 11. (Poznamenajme, že horná krivka pretne krivku C v bode $x = y$, takže pre $n = 3$ je ten prienik prázdny.)



Obr. 3. Situácia v dimenzii 11

Situácia s funkciou $W_2(x,\,y) = x^{d-2}(x+y)\left(y + \sqrt[d]{1 - x^d - y^d}\right)$ je oveľa nepríjemnejšia: parciálna derivácia $\frac{\partial W_2}{\partial y}$ nemá konštantné znamienko na celej skúmanej oblasti a so znamienkom parciálnej derivácie $\frac{\partial W_2}{\partial x}$ sa dá pracovať len na dostatočne malých obdĺžnikoch (alebo na iných jednoduchých oblastiach), aj to pre každú dimenziu zvlášť (dobre to ilustrujú farebné obrázky v [11]).

Výsledok náročných počtov je, že funkcia W_2 má v oblasti $\bar{C}_2$ maximum na krivke C. Pre $d \leqq 10$ je to v tom istom bode B, kde má maximum funkcia W_1 na oblasti $\bar{C}_1$, a dá sa teda nájsť ako viazaný extrém funkcie $W_1 = W_2 = x^d + \frac{x^{d+1}}{y} = x^d \left(1 + \frac{x}{y}\right)$ na krivke C. Hľadanie toho viazaného extrému vedie na rovnice vyšších rádov, je teda numerické.

* * *

Poznamenajme, že skúmanie štvorprvkových jednotkových systémov kociek (touto metódou – ale inú nepoznáme) by už bolo výrazne náročnejšie, pretože treba uvažovať 4 rôzne uloženia, takže aj 4 rôzne váhové funkcie W_1, W_2, W_3, W_4.

Pre hľadanie $\max\min\{W_1(X), W_2(X), W_3(X), W_4(X)\}$ je tak treba nájsť najmenšiu zo štyroch funkcií W_1, W_2, W_3, W_4 na príslušnom obore, ktorý je tiež zložitejší, a to vedie na 6 rovností typu $W_i = W_j$, ktoré namiesto jednej krivky C určujú množinu plôch. Známe sú tak len skôr spomínané Novotného výsledky $V_4(2)$, $V_4(3)$ a dospeli sme aj k výsledku $V_4(4) \doteq 1{,}800\,246\,65$, ktorý doteraz nebol publikovaný.

6. O tabuľke

Pre lepší prehľad je vhodné zapísať čísla $V_n(d)$ do tabuľky: do riadkov vpíšeme výsledky pre dimenzie $d = 2, 3, 4, \ldots$, do stĺpcov výsledky pre počet kociek $n = 2, 3, 4, \ldots$

Tab. 1. Známe výsledky a odhady

$d \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	53	101	$\bar{V}(d)$
2	1,207 107	1,227 759	1,244 020	1,244 020	1,244 020	1,244 020	1,244 020			$< 1{,}4$
3	1,333 333	1,440 100	1,519 630	1,519 630						$< 2{,}26$
4	1,420 319	1,633 697								< 8
5	1,484 664	1,802 804								< 16
6	1,534 555	1,944 492								< 32
7	1,574 570	2,059 097								< 64
8	1,607 498	2,149 306								< 128
9	1,635 145	2,218 978								< 256
10	1,658 736	2,272 201								< 512
11	1,679 140	2,315 336								$< 1\,024$
12	1,696 986	2,353 155								$< 2\,048$
13	1,712 746	2,386 620								$< 4\,096$
20	1,787 007	2,544 993								$< 524\,288$
36	1,862154	2,705 994				> 6				$< 2^{35}$
584	1,986 278	2.971 194						> 52		$< 2^{583}$
1 270	1,993 061	2,985 490							> 100	$< 2^{1\,269}$
∞	2	3	4	5	6	7	8	53	101	

Poznáme niekoľko členov stĺpca pre $n = 2$ a tiež pre $n = 3$, pričom by sme mohli vypočítať aj ďalšie. Lenže pre ostatné stĺpce, teda pre počet kociek 4 a viac poznáme len veľmi málo hodnôt. To nič nemení na tom, že v [2] nájde čitateľ vetu

$$\lim_{d\to\infty} V_n(d) = n \quad \text{pre} \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{1}$$

Tieto hodnoty tvoria *posledný riadok* tabuľky pre $d = \infty$. (V práci [2] je v skutočnosti veta pre $n = 5, 6, 7, \ldots$ Pôvodne sme totiž tvrdenie (1) dokazovali len pre $n = 2, 3, 4$, ale to sme nepublikovali a pri publikovaní pre $n = 5, 6, 7, \ldots$ sme zabudli poznamenať, že dôkaz samozrejme funguje pre každú dimenziu.) Idea dôkazu je nasledovná: zaručí sa existencia limity, skonštruuje sa špeciálna postupnosť (ťažký krok!) a použije sa veta o zovretí pre postupnosti.

V dôsledku vety (1) je jasné, že pri veľmi veľkej dimenzii má každá kocka n-prvkového systému kociek s celkovým objemom 1 dĺžku hrany takmer 1. V takomto prípade, ak n je prvočíslo, tak najekonomickejšie uloženie kociek je „lineárne“, t. j. jedna za druhou ako na obr. 1 vľavo, ináč by sme dostali objem potrebného boxu väčší ako n. Ak je n číslo zložené, môžeme kocky uložiť viacerými spôsobmi podľa prvočíselného rozkladu čísla n. Dobrú predstavu poskytuje jednotkový systém kociek s dĺžkami hrán $x_1 \geqq x_2 = \ldots = x_n$, pričom $x_1 = 1 - d^{-2}$. Napr. pre prvočíslo $n = 101$ a $d \geqq 1\,270$ je $x_1 \doteq 0{,}999\,999\,379$, $x_2 = \ldots = x_{101} = \sqrt[1\,270]{\frac{1-x_1^{1\,270}}{101-1}} \doteq 0{,}990\,788\,877$, a týchto 101 kociek vyžaduje box s objemom $x_1^{d-1} \cdot [x_1 + (n-1)x_2] \doteq 100{,}000\,177$.

Keďže posledný riadok tabuľky obsahuje hromadné body stĺpcov, v okolí týchto čísel musí byť nekonečne veľa členov postupnosti. To znamená že od určitého d_n počnúc, t. j. pre $d \geqq d_n$, je v n-tom stĺpci $V_n(d) \geqq n - 1$. Pretože postupnosť $\{V_n(d)\}_{d=2}^{\infty}$ v n-tom stĺpci je pre každé n neklesajúca, je možné pre vyššie spomínaný špeciálny jednotkový systém kociek $x_1 = 1 - d^{-2}$, $x_2 = \ldots = x_n$ také čísla d_n nájsť. Napr. $d_7 = 36$, $d_{53} = 584$, $d_{101} = 1\,270$. V tabuľke sme vyznačili niekoľko takýchto prípadov.

Tieto čísla poskytujú istý vhľad do stĺpcov tabuľky, ale nezdá sa, že by podstatne pomohli pri riešení základnej otázky, teda pri hľadaní čísel $V(d)$, pretože tabuľka je aj po riadkoch neklesajúca. Súvis s prvočíslami je však zaujímavý. Logické by bolo, aby posledný stĺpec tabuľky obsahoval čísla $V(d)$. Lenže z tých čísel dodnes nie je známe ani jedno, takže v poslednom stĺpci tabuľky sú len čísla $\overline{V(d)}$ ako horné odhady čísel $V(d)$: $V(2) < 1{,}4$ (Hougardy [53]), $V(3) \leqq 2{,}26$ (Novotný [92]), a $V(d) \leqq 2^{d-1}$ pre $d \geqq 4$ (Meir a L. Moser [74]).

7. Dva ľahšie uchopiteľné problémy L. Mosera

Okrem pôvodného problému 2 dodnes nie sú celkom zodpovedané ani nasledovné dva, ktoré sa zdajú byť podstatne ľahšie.

Problém 3. Je možné všetky obdĺžniky $R_i = \frac{1}{i} \times \frac{1}{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ uložiť do štvorca so stranou 1?

Problém 4. Je možné všetky štvorce so stranou $\frac{1}{2i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ uložiť do obdĺžnika s obsahom $\frac{1}{8}\pi^2 - 1$?

Oba problémy 3 aj 4 sú dobre uchopiteľné, lebo sa ukladajú *konkrétne* systémy obdĺžnikov resp. štvorcov. Lenže oba systémy sú nekonečné, pričom súčty príslušných radov sú postupne 1 resp. $\frac{1}{8}\pi^2 - 1$, takže ak odpoveď na niektorú z tých dvoch otázok je kladná, tak odhad formulovaný v otázke by bol najlepší možný, a teda išlo by o problém dláždenia (*tiling*). Odhady boli uverejnené v [57] a [58], lepšie odhady boli však ukázané v [6] aj [8] na základe metódy uvedenej v [7]: pre uloženie systému obdĺžnikov $\frac{1}{i} \times \frac{1}{i+1}$ stačí štvorec s dĺžkou strany 1,002 a pre uloženie štvorcov $\frac{1}{2i+1}$ stačí obdĺžnik s obsahom 0,236 503 8, pričom teoreticky najlepšia hodnota $\frac{1}{8}\pi^2 - 1 \doteq 0{,}233\,700\,55$ je lepšia len o menej ako tri tisíciny. O trochu neskôr však Paulhus v [96] uviedol algoritmy, na základe ktorých počítač uložil také veľké množstvo objektov, že hypoteticky najlepším uloženiam sa priblížil rádovo na stotisíciny.

Treba však dodať, že aj keď je algoritmus veľmi efektívny, Paulhusov dôkaz kľúčovej lemy je chybný (pre všetky tri ním skúmané problémy). Na toto upozornil A. Joós v roku 2016. Preto vznikol článok [61], v ktorom autori využili efektívny algoritmus Paulhusa pre uloženie veľkého počtu obdĺžnikov, pričom na uloženie nekonečného počtu maličkých obdĺžnikov použili metódu geometrického radu z článku [7] a dosiahli odhad s chybou menšou ako $4{,}43 \times 10^{-10}$. Joós takto opravil aj iný Paulhusov odhad. Samozrejme, keďže sa ukladajú nekonečné systémy objektov, počítač musí pre nedostatok pamäte raz s výpočtom skončiť, takže *stále sú obe otázky otvorené.*

8. Niektoré iné typy problémov

Otázky súvisiace s najhustejším uložením objektov sa skúmajú už veľmi dávno. Stačí spomenúť *Keplerovu hypotézu* z roku 1611 (pozri napr. [63], [39], [106], [31], [51], [45], [54], [46], [55], [47], [48], [49], [50], [34]), alebo *Newtonovo číslo* (tzv. *kissing number*) z roku 1694 (pozri napr. [105], [56], [44], [100], [68], [28], [109], [23], [84], [24], [5], [85]). Obidva boli vyriešené len nedávno.

Dokázať, že nejaké uloženie má maximálnu hustotu, je takmer vždy extrémne ťažké, preto sa obvykle skúmajú špeciálne prípady. Tie sú zaujímavé samy osebe, ale často sú aj mimoriadne užitočné, napr. pri šetrení obalovým materiálom alebo priestorom pri preprave výrobkov. Pre informáciu čitateľa a najmä pre množstvo otvorených otázok preto heslovite uvedieme niektoré špeciálne prípady spolu aj s literatúrou; z tej ako základnú knihu môžeme odporučiť [25], ale mnoho zaujímavého – a tiež iné typy problémov – nájde čitateľ aj v iných prehľadoch, napr. [43], [27], [32], [24], [33]. Samozrejme, ako dôsledok vývoja počítačov sa čoraz častejšie objavujú „počítačové riešenia“, ktoré nájdu „extremálne“ uloženie, ale nekladú si za cieľ dokázať, že o extrém naozaj ide.

Ukladanie kruhov do štvorca nájde záujemca napr. v [102], [104], [103], [98], [76], [70], [93], [3], [72].

Ukladanie kruhov do kruhu nájde záujemca napr. v [99], [62], [77], [40], [41], [35], [36], [37], [38].

Ukladanie gulí do boxu, do kocky alebo do gule (často sú skúmané ako husté rozmiestnenia bodov, ktoré sú stredmi tých gulí), pozri napr. [94], [69], [107], [14], [15], [26], [24], [16], [17], [59], [18], [52], [60], [19], [20], [1].

Ukladanie obdĺžnikov do obdĺžnika alebo štvorca nájde záujemca napr. v [80], [74], [6], [7], [57], [58], [8], [96], [61], [56].

Ukladanie trojuholníkov do kruhu, pozri napr. [71], [108], [4], [9], [22], [21].

Ukladanie kruhov do trojuholníka, pozri napr. [95], [75], [78], [79], [40], [97].

Analogické sú otázky týkajúce sa najtenšieho a veľmi často aj viacnásobného pokrytia (the *thinnest covering*), ale to by sa už literatúra neúmerne predĺžila. A to sme vôbec nespomenuli problémy kombinatorickej geometrie, teda hľadanie extremálneho počtu objektov s danou vlastnosťou.

Mnoho ľudí považuje tento typ problémov len za hru. Áno, je to zábavné, ale výsledky tejto hry sú neraz mimoriadne užitočné (pri uloženiach napr. úspora obalov, pri pokrytiach také rozmiestnenie objektov, aby všetko bolo v operačnom dosahu, prípadne aj s viacnásobnou istotou). A výsledok tejto matematickej hry je dosť nejasný, lebo ak to zosumarizujeme, tak vidíme, že dodnes nie je známa ani jedna presná hodnota $V(d)$, ba dokonca aj z čísel $V_n(d)$ je známych pre $n \geqq 4$ len veľmi málo. Takže, milý čitateľ, pieskovisko je tu, môžeš sa začať hrať.

L i t e r a t ú r a

[1] Adamko, P.: *On the number of points at distance at least 1 in the unit four-dimensional cube.* J. Geom. Graph. 23 (2019), 1–3.

[2] Adamko, P., Bálint, V.: *Universal asymptotical results on packing of cubes.* Stud. Univ. Žilina Math. Ser. 28 (2016), 5–16.

[3] Ament, P., Blind, G.: *Packing equal circles in a square.* Studia Sci. Math. Hungar. 36 (2000), 313–316.

[4] Andreescu, T., Mushkarov, O.: *A note on the Malfatti problem.* Math. Reflections 4 (2006), 1–7.

[5] Anstreicher, K. M.: *The thirteen spheres: A new proof.* Discrete Comput. Geom. 31 (2004), 613–625.

[6] Bálint, V.: *Poznámka k jednému ukladaciemu problému.* Práce a Štúdie Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, séria Mat.–Fyz. 8 (1990), 7–12.

[7] Bálint, V.: *A packing problem and the geometrical series.* In: J. Nešetřil, M. Fiedler (eds.): Fourth Czechoslovakian symposium on combinatorics, graphs and complexity, held in Prachatice, Czechoslovakia, 1990. Proceedings. Annals of Discrete Mathematics, vol. 51. North-Holland, Amsterdam, 1992, 17–21.

[8] Bálint, V.: *Two packing problems.* Discrete Math. 178 (1998), 233–236.

[9] Bálint, V.: *Maximization of the sum of areas.* Stud. Univ. Žilina Math. Ser. 24 (2010), 1–8.

[10] Bálint, V.: *Dva typy najlepších uložení systému štvorcov v obdĺžniku.* Proceedings of Symposium on Computer Geometry, STU, Bratislava, 2011, 13–16.

[11] Bálint, V., Adamko, P.: *Minimalizácia objemu kvádra pre uloženie troch kociek v dimenzii 4.* G, Slov. Čas. Geom. Graf. 12 (2015), 5–16.

[12] Bálint, V., Adamko, P.: *Minimization of the container for packing of three cubes in dimension 4.* Proceedings of Slovak–Czech Conference on Geometry and Graphics, STU, Bratislava, 2015, 13–24.

[13] Bálint, V., Adamko, P.: *Minimization of the parallelepiped for packing of three cubes in dimension 6.* Proceedings of APLIMAT 2016 – 15th Conference on Applied Mathematics, Bratislava, 2016, 44–55.

[14] Bálint, V., Bálint, V., jr.: *Unicity of one optimal arrangement of points in the cube.* Proceedings of Symposium on Computer Geometry, Bratislava, 2001, 8–10.

[15] Bálint, V., Bálint, V., jr.: *On the number of points at distance at least one in the unit cube.* Geombinatorics 12 (2003), 157–166.

[16] Bálint, V., Bálint, V., jr.: *Horný odhad pre rozmiestňovanie bodov v kocke.* Sborník 5. konference o matematice a fyzice na VŠT, Brno, 2007, 32–35.

[17] Bálint, V., Bálint, V., jr.: *On the maximum number of points at least one unit away from each other in the unit n-cube.* Periodica Math. Hung. 57 (2008), 83–91.

[18] Bálint, V., Bálint, V., jr.: *Umiestňovnie bodov do jednotkovej kocky.* G, Slov. Čas. Geom. Graf. 5 (2008), 5–12.

[19] Bálint, V., Bálint, V., jr.: *Placing of points into the 5-dimensional unit cube.* Period. Math. Hungar. 65 (2012), 1–16.

[20] Bálint, V., Bálint, V., jr.: *Packing of points into the unit 6-dimensional cube.* Contrib. Discrete Math. 7 (2012), 51–57.

[21] Bálint, V., Kaukič, M., Peško, Š.: *Solving one maximization problem using a computer.* Abstracts of the 3rd Croatian Conference on Geometry and Graphics, `http://www.grad.hr/sgorjanc/supetar/abstracts.pdf`

[22] Bezdek, A., Fodor, F.: *Extremal triangulations of convex polygons.* Symmetry: Culture and Science 21 (2010), 333–340.

[23] Böröczky, K.: *The Newton-Gregory problem revisited.* In: A. Bezdek (ed.): Discrete Geometry, Marcel Dekker, New York, 2003, 103–110.

[24] Böröczky, K., jr.: *Finite packing and covering.* Cambridge Univ. Press, 2004.

[25] Brass, P., Moser, W. O. J., Pach, J.: *Research problems in discrete geometry.* Springer, New York, 2005.

[26] Cohn, H., Elkies, N. D.: *New upper bounds on sphere packings I.* Ann. of Math. (2) 157 (2003), 689–714.

[27] Croft, H. T., Falconer, K. J., Guy, R. K.: *Unsolved problems in geometry.* 2nd ed., Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1994.

[28] Edel, Y., Rains, E. M., Sloane, N. J. A.: *On kissing numbers in dimensions 32 to 128.* Electron. J. Combin. 5 (1988), #R22.

[29] Erdős, P.: *On some problems of elementary and combinatorial geometry.* Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV 103 (1975), 99–108.

[30] Erdős, P.: *Some more problems on elementary geometry.* Austral. Math. Soc. Gaz. 5 (1978), 52–54.

[31] Fejes Tóth, L.: *Remarks on a theorem of R. M. Robinson.* Studia Sci. Math. Hung. 4 (1969), 441–445.

[32] Fejes Tóth, L.: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* 2. Auflage, Springer-Verlag, 2003.

[33] Fejes Tóth, G., Kuperberg, W.: *Packing and covering with convex sets.* In: P. M. Gruber et al. (ed.): Handbook of convex geometry, Volume B, North-Holland, Amsterdam, 1993, 799–860.

[34] Ferguson, S. P., Hales, T. C.: *The Kepler conjecture: The Hales–Ferguson proof.* Springer, New York, 2011.

[35] Fodor, F.: *The densest packing of 19 congruent circles in a circle.* Geom. Dedicata 74 (1999), 139–145.

[36] Fodor, F.: *The densest packing of 12 congruent circles in a circle*. Beitr. Algebra Geom. 21 (2000), 401–409.

[37] Fodor, F.: *Packing 14 congruent circles in a circle*. Stud. Univ. Žilina Math. Ser. 16 (2003), 25–34.

[38] Fodor, F.: *The densest packing of 13 congruent circles in a circle*. Beitr. Algebra Geom. 21 (2003), 431–440.

[39] Gauss, C. F.: *Recension der Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seber*. J. Reine Angew. Math. 20 (1840), 312–320.

[40] Graham, R. L., Lubachevsky, B. D.: *Dense packings of equal disks in an equilateral triangle: from 22 to 34 and beyond*. Electron. J. Combin. 2 (1995), #A1.

[41] Graham, R. L., Lubachevsky, B. D., Nurmela, K. J., Östergård, P. R. J.: *Dense packings of congruent circles in a circle*. Discrete Math. 181 (1998), 139–154.

[42] Groemer, H.: *Covering and packing properties of bounded sequences of convex sets*. Mathematica 29 (1982), 18–31.

[43] Guy, R. K.: *Problems*. In: L. M. Kelly (ed.): The geometry of metric and linear spaces. Proceedings of a conference held at Michigan State University, East Lansing, June 17–19, 1974, Springer-Verlag, 1975, 233–244.

[44] Hadwiger, H.: *Über Treffenzahlen bei translationsgleichen Eikörpen*. Arch. Math. 8 (1957), 212–213.

[45] Hales, T. C.: *The sphere packing problem*. J. Comput. Appl. Math. 44 (1992), 41–76.

[46] Hales, T. C.: *The status of the Kepler conjecture*. Math. Intelligencer 16 (1994), 47–58.

[47] Hales, T. C.: *Sphere packings, I*. Discrete Comput. Geom. 17 (1997), 1–51.

[48] Hales, T. C.: *Sphere packings, II*. Discrete Comput. Geom. 18 (1997), 135–149.

[49] Hales, T. C.: *Cannonballs and honeycombs*. Notices Amer. Math. Soc. 47 (2000), 440–449.

[50] Hales, T. C., Ferguson, S. P.: *The Kepler conjecture*. Discrete Comput. Geom. 36 (2006), 1–269.

[51] Hortobágyi, I.: *Über die Scheibenklassen bezügliche Newtonsche Zahl der konvexen Scheiben*. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 18 (1975), 123–127.

[52] Horvát, G. Á.: *Packing points into a unit cube in higher space*. Stud. Univ. Žilina Math. Ser. 24 (2010), 23–28.

[53] Hougardy, S.: *On packing squares into a rectangle*. Tech. Report 101007. Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, March 2010.

[54] Hsiang, W.-Y.: *On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture*. Internat. J. Math. 4 (1993), 739–831.

[55] Hsiang, W.-Y.: *A rejoinder to T. C. Hales' article: „The status of the Kepler conjecture"*. Math. Intelligencer 17 (1994), 35–42.

[56] Januszewski, J.: *Packing rectangles into a large square*. Period. Math. Hungar. 72 (2016), 90–101.

[57] Jennings, D.: *On packing unequal rectangles in the unit square*. J. Combin. Theory, Ser. A 68 (1994), 465–469.

[58] Jennings, D.: *On packing of squares and rectangles.* Discrete Math. 138 (1995), 293–300.

[59] Joós, A.: *Pontok elhelyezése egységkockában.* PhD tézisek, 2008.

[60] Joós, A.: *On the number of points at distance at least 1 in the 5-dimensional unit cube.* Acta Sci. Math. 76 (2010), 217–231.

[61] Joós, A., Bálint, V.: *Packing of odd squares revisited.* J. Geom. 110 (2019), article no. 10.

[62] Kabatjanskij, G. A., Levenshtein, V. I.: *Bounds for packings on a sphere and space.* Problemy Peredachi Informatsii 14 (1978), 3–24.

[63] Kepler, J.: *Strena seu de nive sexangula.* Tampach, Frankfurt, 1611. English translation: *The six-cornered snowflake.* Oxford, 1966.

[64] Kleitman, D. J., Krieger, M. M.: *Packing squares in rectangles I.* Ann. New York Acad. Sci. 175 (1970), 253–262.

[65] Kleitman, D. J., Krieger, M. M.: *An optimal bound for two dimensional bin packing.* Proceedings of the 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society, 1975, 163–168.

[66] Kosiński, A.: *A proof of the Auerbach-Banach-Mazur-Ulam theorem on convex bodies.* Colloq. Math. 4 (1957), 216–218.

[67] Leech, J.: *The problem of thirteen spheres.* Math. Gaz. 40 (1956), 22–23.

[68] Leech, J.: *Some sphere packings in higher space.* Canad. J. Math. 16 (1964), 657–682.

[69] Levenshtein, V. I.: *On bounds for packings in n-dimensional Euclidean space.* Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 417–421.

[70] Lubachevsky, B. D., Graham, R. L., Stikkinger, F. H.: *Patterns and structures in disk packings.* Period. Math. Hungar. 34 (1997), 123–142.

[71] Malfatti, G.: *Memoria sopra un problema sterotomico.* Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze 10 (1803), 235–244.

[72] Markót, M. Cs.: *Optimal packing of 28 equal circles in a unit square – the first reliable solution.* Numer. Algorithms 37 (2004), 253–261.

[73] Mauldin, R. D.: *The Scottish Book.* Birkhäuser, 1981.

[74] Meir, A., Moser, L.: *On packing of squares and cubes.* J. Combin. Theory 5 (1968), 126–134.

[75] Melissen, J. B. M.: *Densest packings of congruent circles in an equilateral triangle.* Amer. Math. Monthly 100 (1993), 916–925.

[76] Melissen, J. B. M.: *Densest packing of six equal circles in a square.* Elem. Math. 49 (1994), 27–31.

[77] Melissen, J. B. M.: *Densest packing of eleven congruent circles in a circle.* Geom. Dedicata 50 (1994), 15–25.

[78] Melissen, J. B. M.: *Densest packing of eleven congruent circles in an equilateral triangle.* Acta Math. 65 (1994), 389–393.

[79] Melissen, J. B. M., Schuur, P. C.: *Packing 16, 17 or 18 circles in an equilateral triangle.* Discrete Math. 145 (1995), 333–342.

[80] Moon, J., Moser, L.: *Some packing and covering theorems.* Colloq. Math. 17 (1967), 103–110.

[81] Moser, L.: *Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry.* 1963.

[82] Moser, W. O. J.: *Problems, problems, problems.* Discrete Appl. Math. 31 (1991), 201–225.

[83] Moser, W. O. J., Pach, J.: *Research problems in discrete geometry.* McGill University, Montreal, 1986, 1993.

[84] Musin, O. R.: *The problem of twenty-five spheres.* Russian Math. Surveys 58 (2003), 794–795.

[85] Musin, O. R.: *The kissing number in four dimensions.* Ann. of Math. (2) 168 (2008), 1–32.

[86] Novotný, P.: *A note on packing of squares.* Studies Univ. Žilina Mat.-Phys. Ser. A 10 (1995), 35–39.

[87] Novotný, P.: *On packing of squares into a rectangle.* Arch. Math. (Brno) 32 (1996), 75–83.

[88] Novotný, P.: *On packing of four and five squares into a rectangle.* Note Mat. 19 (1999), 199–206.

[89] Novotný, P.: *Využitie počítača pri riešení ukladacieho problému.* Proceedings of Symposium on Computational Geometry, STU, Bratislava, 2002, 60–62.

[90] Novotný, P.: *Pakovanie troch kociek.* Proceedings of Symposium on Computer Geometry, STU, Bratislava, 2006, 117–119.

[91] Novotný, P.: *Najhoršie pakovateľné štyri kocky.* Proceedings of Symposium on Computer Geometry, STU, Bratislava, 2007, 78–81.

[92] Novotný, P.: *Ukladanie kociek do kvádra.* Proceedings of Symposium on Computer Geometry, STU, Bratislava, 2011, 100–103.

[93] Nurmela, K. J., Östergård, P. R. J.: *More optimal packings of equal circles in a square.* Discrete Comput. Geom. 22 (1999), 439–457.

[94] Odlyzko, A. M., Sloane, N. J. A.: *New bounds on the unit spheres that can touch a unit sphere in n-dimensions.* J. Combin. Theory Ser. A 26 (1979), 210–214.

[95] Oler, N.: *A finite packing problem.* Canad. Math. Bull. 4 (1961), 153–155.

[96] Paulhus, M.: *An algorithm for packing squares.* J. Combin. Theory Ser. A 82 (1998), 147–157.

[97] Payan, Ch.: *Empilement de cercles égaux dans un triangle équilatéral. À propos d'une conjecture d'Erdős-Oler.* Discrete Math. 165–166 (1997), 555–565.

[98] Peikert, R., Würtz, D., Monagan, M., de Groot, C.: *Packing circles in a square: A review and new results.* In: P. Kall (ed.): System modelling and optimization. Proceedings of the 15th IFIP conference, Zurich, Switzerland, September 2–6, 1991, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 45–54.

[99] Pirl, U.: *Der Mindestabstand von n in der Einheitskreisscheibe gelegenen Punkten.* Math. Nachr. 40 (1969), 111–124.

[100] Rogers, C. A.: *The packing of equal spheres.* Proc. Lond. Math. Soc. (3) 8 (1958), 609–620.

[101] Sedliačková, Z.: *Packing three cubes in 8-dimensional space.* J. Geom. Graph. 22 (2018), No. 2, 217–223.

[102] Schaer, J.: *The densest packing of 9 circles in a square.* Canad. Math. Bull. 8 (1965), 273–277.

[103] Schaer, J.: *On the densest packing of spheres in a cube.* Canad. Math. Bull. 9 (1966), 265–270.

[104] Schaer, J., Meir, A.: *On a geometric extremum problem.* Canad. Math. Bull. 8 (1965), 21–27.

[105] Schütte, K., van der Waerden, B. L.: *Das Problem der dreizehn Kugeln.* Math. Ann. 125 (1953), 325–334.

[106] Thue, A.: *On the densest packing of congruent circles in the plane.* Skr. Vidensk.-Selsk. Christiana 1 (1910), 3–9.

[107] Vardy, A.: *A new sphere packing in 20 dimensions.* Invent. Math. 121 (1995), 119–133.

[108] Zalgaller, V. A., Los, G. A.: *The solution of Malfatti's problem.* J. Math. Sci. (N.Y.) 72 (1994), 3163–3177.

[109] Zong, C.: *The kissing numbers of convex bodies – a brief survey.* Bull. Lond. Math. Soc. 30 (1998), 1–10.